

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (10 Pkt.): Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 11 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie explizit Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k$,

sodass $E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A$ in Zeilenstufenform ist und berechnen Sie das Produkt $E_k \cdot \dots \cdot E_1$.

Aufgabe 2 (5+5 Pkt.): Sei $A = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei $v_i \in \mathbb{R}^n$ die Spalten von A bezeichne. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) Es gilt $A^T A = I_n$ genau dann, wenn $v_i^T v_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$.
- (b) Es gilt $A^T A = I_n$ genau dann, wenn $(Ax)^T (Ay) = x^T y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (7+3 Pkt.): Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \det(2 \cdot A + x \cdot I_2).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $f(x) = x^2 + 2(a_{11} + a_{22})x + 4 \det(A)$.
- (b) Bestimmen Sie (z.B. mit der p - q -Formel) die möglichen Nullstellen von f in Termen der a_{ii} und $\det(A)$.

Aufgabe 4 (Multiple Choice, 3+3+2+2 Pkt.): Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort:

- (a) Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $\det(A) \neq 0$ ist $\det\left(\frac{1}{\det(A)} \cdot A\right) = 1$.
- (b) Seien $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = \beta\}$ und $H' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'^T x = \beta'\}$ zwei Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $H = H'$ genau dann, wenn $a = a'$ und $\beta = \beta'$.
- (c) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_2 \geq 0$.
- (d) Für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A = -A^T$ ist $\det(A) = 0$.

Abgabe: In den entsprechenden Zettelkasten gegenüber vom Raum 25.22.00.58 bis Mi., 13.05.2026, 10:00 Uhr.

Besprechung: In der Übung am Mi., 13.05.2026.